Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programas de la asignatura

- Programa de estudio de *Cálculo Integral* del Plan 2010 (segundo semestre, 9 créditos, 72 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. Cuatro temas: las integrales definida e indefinida; funciones logaritmo y exponencial; métodos de integración; derivación y diferenciación de funciones escalares de dos o más variables.
- Programa de estudio de *Cálculo Integral* del Plan 2016 (segundo semestre, 8 créditos, 64 horas), Facultad de Ingeniería, UNAM. Cuatro temas: sucesiones y series; las integrales definida e indefinida; métodos de integración; derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables.

De ellos se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Exámenes finales colegiados y extraordinarios de la asignatura: 52 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2016-2) y 60 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), con sus versiones (tipos A, C, D) entre paréntesis. Para la Unidad 5 se usaron también los exámenes parciales del Plan 2016 (2024-2 a 2026-2). En cada ejercicio de este cuaderno se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2011-2, tipo A, problema 3». Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias; las resoluciones publicadas solo se usaron para cotejar (Apéndice C).

Plan 2010.

- Primer final (23): 2010-1 (A, C), 2010-2 (A, C), 2011-1 (A, C), 2011-2 (A, C, D), 2012-1 (A, C), 2012-2 (A, C), 2013-1 (A, C), 2013-2, 2014-1, 2014-2, 2015-1, 2015-2 (A, C), 2016-1 (A, C).
- Segundo final (7): 2010-1, 2010-2, 2011-1, 2011-2, 2015-1, 2015-2, 2016-1.
- Primer extraordinario (8): 2010-2, 2011-1, 2011-2, 2012-1, 2015-1, 2015-2, 2016-1, 2016-2.
- Segundo extraordinario (9): 2010-1, 2010-2, 2011-1, 2011-2, 2012-2, 2015-1, 2015-2, 2016-1, 2016-2.
- Tercer extraordinario (5): 2011-2, 2015-1, 2015-2, 2016-1, 2016-2.

Plan 2016.

- Primer final (21): 2016-2 (A, C), 2017-1 (A, C), 2017-2 (A, C), 2018-1 (A, C), 2018-2 (A, C), 2019-1 (A, C), 2019-2 (A, C), 2020-1 (A, C), 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2, 2026-1.
- Segundo final (12): 2016-2, 2017-1, 2017-2, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-1, 2024-2, 2025-2, 2026-1.
- Primer extraordinario (9): 2017-1, 2017-2, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-1, 2024-2.
- Segundo extraordinario (8): 2017-1, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-2, 2026-1.

4. $x = 1$: $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, que converge absolutamente por el paso anterior.
5. **Intervalo de convergencia:** $1 \le x \le 7$**.**

Ejercicio 5.6.2 ← volver

1. Es alternada con $b_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{7}} = 7^{-1/(n+1)} > 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 7^0 = 1 \neq 0$: no se cumple la segunda condición de Leibniz.
3. Además b_n crece (el exponente $-\frac{1}{n+1}$ aumenta hacia 0), así que tampoco decrece.
4. Los términos $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ oscilan cerca de 1 y -1: $\lim a_n$ no existe.
5. **La serie diverge por el criterio del término n-ésimo.**

Ejercicio 5.6.3 ← volver

1. $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.
2. Geométrica con $a = \frac{7}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$; como $|r| < 1$, converge.
3. Suma: $\dfrac{7/10}{1 - 1/10} = \dfrac{7/10}{9/10} = \dfrac{7}{9}$.
4. **Converge y** $0.777\ldots = \frac{7}{9}$**.** Comprobación: $9 \cdot 0.777\ldots = 7.000\ldots$

Ejercicio 5.6.4 ← volver

1. Simplifica: $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Derivadas: $f' = \frac{1}{3}(1+x)^{-1}$, $f'' = -\frac{1}{3}(1+x)^{-2}$, $f''' = \frac{2}{3}(1+x)^{-3}$. En general,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3(1+x)^n},$$

   y $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3}$, con $f(0) = 0$.
3. Coeficiente: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$.
4. $\ln\sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{3n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{9} - \ldots$, que es un tercio de la serie de $\ln(1+x)$ (sección 5.4) y converge en $(-1, 1]$.

Ejercicio 5.6.5 ← volver

1. Como $(x-1)^2 = (1-x)^2$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. Serie conocida: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$. Derivando término a término:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

3. Por derivadas da lo mismo: $g^{(n)}(0) = \frac{(n+1)!}{2}$, y $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{2}$.
4. $g(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $-1 < x < 1$. Comprobación: $g(0) = \frac{1}{2}$, que es el primer término.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

E.1 · Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental

Ejercicio 1.6.1 ← volver

1. $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$, $f(x_i) = 2 + \frac{2i}{n}$.
2. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\,n + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 4 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = 4 + 2 = 6$.
4. Comprobación: $\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^3 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$.
5. $\int_1^3 (x+1)\,\mathrm{d}x = 6$**.**

Ejercicio 1.6.2 ← volver

1. $f(t) = \cos t$; límite superior $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$; límite inferior $h(x) = x$, $h'(x) = 1$.
2. TFC: $F'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x - \cos x \cdot 1$.
3. Comprobación: $F(x) = \operatorname{sen} t\big|_x^{x^2} = \operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen} x$, cuya derivada es $2x\cos(x^2) - \cos x$.
4. $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$**.**

Ejercicio 1.6.3 ← volver

1. Con $u = 1 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2\sqrt{1-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. $\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^b = 2 - 2\sqrt{1-b}$.
3. $2 - 2\sqrt{1-b} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$.
4. $b = \frac{3}{4} < 1$: el integrando es continuo en $[0, \frac{3}{4}]$.
5. $b = \frac{3}{4}$**.**

Ejercicio 1.6.4 ← volver

1. Con $u = \operatorname{sen} x$, $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$: $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\operatorname{sen} x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$.
2. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\operatorname{sen}(\pi/2)} - e^{\operatorname{sen} 0} = e - 1$.
3. $\bar{f} = \dfrac{e-1}{\pi/2} = \dfrac{2(e-1)}{\pi}$**.**

3. $A = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\mathrm{d}x = \left(\frac{8}{3}x^3 - x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{3} - 16$.
4. $A = \frac{16}{3}\,[u^2]$.

Ejercicio 3B.6.2 ← volver

1. Región: entre el eje y y la curva $x = y^3$, para $0 \le y \le 1$. Toca el eje de giro.
2. Discos horizontales de radio $R = y^3$: $V = \pi \int_0^1 y^6 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{7}$.
3. Comprobación con capas: $2\pi \int_0^1 x\left(1 - x^{1/3}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.
4. $V = \frac{\pi}{7}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.3 ← volver

1. El sólido es como un tronco de cono curvo: radio 1 en $x = 0$ y $\frac{1}{2}$ en $x = \ln 2$. Discos verticales de radio $R = e^{-x}$.
2. $V = \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x}\mathrm{d}x = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$.
3. $V = \frac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.4 ← volver

1. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 6\theta$; $r^2 + (r')^2 = 9\theta^4 + 36\theta^2 = 9\theta^2(\theta^2 + 4)$.
2. Con $\theta \ge 0$, la raíz es $3\theta\sqrt{\theta^2 + 4}$: $L = \int_0^{\pi} 3\theta\sqrt{\theta^2 + 4}\,\mathrm{d}\theta$.
3. Con $u = \theta^2 + 4$, $\mathrm{d}u = 2\theta\mathrm{d}\theta$: $L = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_4^{\pi^2+4} = (\pi^2 + 4)^{3/2} - 8$.
4. $L = (\pi^2 + 4)^{3/2} - 8\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta^2 + 4)^{3/2} = 3\theta\sqrt{\theta^2 + 4}$.

Ejercicio 3B.6.5 ← volver

1. Es una cardioide simétrica respecto al eje y: $r = 4$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $r = 0$ en $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Una vuelta completa barre la región una vez.
2. $(2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 4 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 6 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\cos 2\theta$.
3. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(6 + 8\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(12\pi + 0 - 0)$.
4. $A = 6\pi\,[u^2]$.

Ejercicio 3B.6.6 ← volver

1. $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{x}$; $[f'(x)]^2 = 4x$.
2. $L = \int_0^{1/4} \sqrt{1 + 4x}\,\mathrm{d}x$. Con $u = 1 + 4x$: $L = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\, u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
3. $L = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{6}(1 + 4x)^{3/2} = \sqrt{1 + 4x}$.

E.4 · Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional

Ejercicio 4.6.1 ← volver

1. Primero respecto a x (producto): $f_x = y\ln(xy) + xy \cdot \dfrac{y}{xy} = y\ln(xy) + y$.

1. En $x = 5$ el denominador se anula y $\ln(x - 5) \to -\infty$: $\int_5^6 = \lim_{t \to 5^+} \int_t^6$.
2. Con $u = \ln(x - 5)$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x-5}$:

$$\int \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln^2(x-5) + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{1}{4}\ln^2(x-5)\right]' = \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}$.
3. Evaluación: $\lim_{t\to 5^+}\left[\frac{1}{4}\ln^2 1 - \frac{1}{4}\ln^2(t-5)\right] = 0 - \infty$.
4. **La integral diverge.**

Ejercicio 2.6.5 ← volver

1. Cambio de base y propiedades: $y = \dfrac{\ln e^{\mathrm{sen}\,x} - \ln 2}{\ln 2} = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\ln 2} - 1$.
2. Derivada: $y' = \dfrac{\cos x}{\ln 2}$ (la constante -1 no cuenta).
3. **En $x = 0$: $y' = \dfrac{1}{\ln 2}$.**

Ejercicio 2.6.6 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\coth x \to \infty$: forma 1^{∞}.
2. $\ln y = \coth x\,\ln(1 - \mathrm{senh}\,x) = \dfrac{\ln(1 - \mathrm{senh}\,x)}{\tanh x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cosh x/(1 - \mathrm{senh}\,x)}{\mathrm{sech}^2\,x} = -1.$$

4. $\lim_{x\to 0^+}(1 - \mathrm{senh}\,x)^{\coth x} = e^{-1}$.

E.3A · Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

Ejercicio 3A.6.1 ← volver

1. Partes con $u = \mathrm{sen}(\ln x)$, $\mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$:

$$I = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con $u = \cos(\ln x)$, $v = x$:

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I$$

3. Integral cíclica: $I = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$, de donde $2I = x\left[\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right]$.
4. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left[\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$. Comprobación:

$$\tfrac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\cos(\ln x) + \mathrm{sen}(\ln x)\right] = \mathrm{sen}(\ln x)$$

- Tercer extraordinario (10): 2017-1, 2017-2, 2018-1, 2018-2, 2019-1, 2019-2, 2020-1, 2024-2, 2025-1, 2026-1.

Duración: dos horas (dos horas y media en algunos exámenes de 2010 y 2011). Desde 2024 las instrucciones prohíben cualquier dispositivo electrónico y el formulario.

Bibliografía de los programas

Plan 2010. Básica

- Larson, R. E., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. *Cálculo I* y *Cálculo II*, 8.ª ed. México: McGraw-Hill, 2006.
- Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. E. *Cálculo*, 9.ª ed. México: Pearson Educación, 2007.
- Stewart, J. *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.
- Stewart, J. *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas*, 6.ª ed. México: Cengage Learning, 2008.

Plan 2010. Complementaria

- Andrade D., A. y otros. *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa y Facultad de Ingeniería, UNAM, 2004.
- García y Colomé, P. *Integrales impropias*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.
- García y Colomé, P. *Funciones hiperbólicas*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.
- Spiegel, M. R. *Cálculo superior*. México: McGraw-Hill, 2001.
- Swokowski, E. W., Olinick, M. y Pence, D. *Calculus*. EUA: PWS Publishing Company, 1994.
- Thomas, G. y Finney, R. *Cálculo una variable*, 10.ª ed. México: Pearson Educación, 2005.
- Thomas, G. y Finney, R. *Cálculo varias variables*, 10.ª ed. México: Pearson Educación, 2005.

Plan 2016. Básica (además de Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, y los dos de Stewart, 2008)

- Larson, R. y Edwards, B. *Cálculo 1* y *Cálculo 2*, 9.ª ed. México: McGraw-Hill, 2010.

Plan 2016. Complementaria (además de los dos de García y Colomé, 2002; Spiegel, 2001; y los dos de Thomas y Finney, 2005)

- Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. *Calculus with Analytic Geometry*, 8.ª ed. Boston: Houghton Mifflin, 2006.
- Rogawski, J. *Cálculo. Una variable*, 2.ª ed. Barcelona: Reverté, 2012.
- Rogawski, J. *Cálculo. Varias variables*, 2.ª ed. Barcelona: Reverté, 2012.
- Zill, D. G. y Wright, W. S. *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, 4.ª ed. México: McGraw-Hill, 2011.
- Zill, D. G. y Wright, W. S. *Cálculo de varias variables*, 4.ª ed. México: McGraw-Hill, 2011.

La notación de este cuaderno (ang sen x, ang tan x y ang sec x para las trigonométricas inversas; senh x y cosh x; «ordenada media»; $[u^2]$ y $[u^3]$ para las unidades de área y volumen) es la de los enunciados de los exámenes.

Ejercicio 1.6.5 ← volver

1. En $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \geq 0$, así que $|\tan x| = \tan x$.
2. Con $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

   Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
3. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.
4. **a)** $\bar{f} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2}{\pi/4} = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$.
5. **b)** $\tan c = \frac{2\ln 2}{\pi} \Rightarrow c = \operatorname{ang}\tan\frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$, que está en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \approx [0,\ 0.785]$.

E.2 · Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia

Ejercicio 2.6.1 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\csc x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \csc x\,\ln(x + \cos x) = \dfrac{\ln(x+\cos x)}{\operatorname{sen} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(x+\cos x)\cos x} = 1.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\cos x)^{\csc x} = e^1 = e$.

Ejercicio 2.6.2 ← volver

1. Forma $\infty - \infty$. Común denominador: $\dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: $\dfrac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x}$, otra vez $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: $\dfrac{-e^x}{2e^x + xe^x} \to \dfrac{-1}{2}$.
4. **El límite vale** $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2.6.3 ← volver

1. Forma $\infty \cdot 0$. Como cociente: $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{4x}}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\cos\left(\frac{1}{2x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$; denominador $-\frac{1}{4x^2}$.
3. Cociente: $2\cos\left(\frac{1}{2x}\right) \to 2\cos 0$.
4. **El límite vale** 2.

Ejercicio 2.6.4 ← volver

2. Luego respecto a y: $f_{xy} = \ln(xy) + y\cdot\dfrac{x}{xy} + 1 = \ln(xy) + 2$.
3. **En** (e, e)**:** $\ln e^2 + 2 = 2 + 2 = 4$.

Ejercicio 4.6.2 ← volver

1. $u_x = -e^{-x}\cos y + e^{-y}\operatorname{sen} x$; $u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$.
2. $u_y = -e^{-x}\operatorname{sen} y + e^{-y}\cos x$; $u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.
3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$**: la ecuación se cumple en todo el plano.**

Ejercicio 4.6.3 ← volver

1. Tercera coordenada: $z_0 = g(2,2) = \sqrt{9-4-4} = 1$; el punto es $(2, 2, 1)$.
2. $g_x = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, $g_y = \dfrac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$; en $(2,2)$: $g_x = g_y = -2$.
3. Plano $z - z_0 = g_x(x - x_0) + g_y(y - y_0)$: $z - 1 = -2(x-2) - 2(y-2)$.
4. $2x + 2y + z = 9$. Comprobación: $(2, 2, 1)$ da $4 + 4 + 1 = 9$.

Ejercicio 4.6.4 ← volver

1. $F(x, y, z) = 2xy - z + z^4 + 4$. El punto cumple: $-4 - 1 + 1 + 4 = 0$.
2. $\nabla F = (2y,\ 2x,\ 4z^3 - 1)$; en A: $(-4,\ 2,\ 3)$.
3. **Recta normal:** $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, o $(x, y, z) = (1 - 4t,\ -2 + 2t,\ 1 + 3t)$.

Ejercicio 4.6.5 ← volver

1. $f_u = 2u$, $f_v = -1$, $u_y = -e^{2x-y}$, $v_y = \dfrac{x}{xy} = \dfrac{1}{y}$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2u\left(-e^{2x-y}\right) - \dfrac{1}{y} = -2e^{2(2x-y)} - \dfrac{1}{y}$.
3. **En** $(1, 1)$**:** $-2e^2 - 1$.

Ejercicio 4.6.6 ← volver

1. $\nabla f = \left(\dfrac{2x}{y},\ -\dfrac{x^2}{y^2}\right)$; en P: $(4, -4)$.
2. Con $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, f no cambia si $D_{\mathbf{u}}f = 4\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, $\tan\theta = 1$.
3. Soluciones en $[0, 2\pi)$: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$. **En** $[\pi, 2\pi]$**:** $\theta = \frac{5\pi}{4}$, la dirección de $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, perpendicular a $\nabla f(P)$.

E.5 · Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

Ejercicio 5.6.1 ← volver

1. Cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{3}.$$

2. $|x - 4| < 3 \Rightarrow 1 < x < 7$. Centro 4, radio 3.
3. $x = 7$: $\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$, serie p con $p = 2$: converge.

Ejercicio 3A.6.2 ← volver

1. Partes con $u = (\ln x)^2$, $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$:
$$I = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x\,\mathrm{d}x$$
2. Partes otra vez, con $u = \ln x$, $v = \frac{x^2}{2}$:
$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$
3. $\int x(\ln x)^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$. Comprobación: $x(\ln x)^2 + x\ln x - x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x(\ln x)^2$.

Ejercicio 3A.6.3 ← volver

1. Se desarrolla el cuadrado y se usa $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:
$$(\tan x - \sec x)^2 = 2\sec^2 x - 1 - 2\sec x \tan x$$
2. Las tres son inmediatas: $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x$, $\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x$.
3. $\int(\tan x - \sec x)^2\mathrm{d}x = 2\tan x - 2\sec x - x + C$. Comprobación: $2\sec^2 x - 2\sec x\tan x - 1 = \tan^2 x - 2\sec x\tan x + \sec^2 x$.

Ejercicio 3A.6.4 ← volver

1. $\frac{1}{\sec(x^2)} = \cos(x^2)$. Con $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$:
$$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 u \cos u\,\mathrm{d}u$$
2. Potencia impar del coseno (exponente 1): $w = \operatorname{sen} u$, $\mathrm{d}w = \cos u\,\mathrm{d}u$; $\frac{1}{2}\int w^2\mathrm{d}w = \frac{1}{6}w^3$.
3. $\int \frac{x\operatorname{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(x^2) + C$. Comprobación: $\frac{1}{6}\cdot 3\operatorname{sen}^2(x^2)\cos(x^2)\cdot 2x = x\operatorname{sen}^2(x^2)\cos(x^2)$.

Ejercicio 3A.6.5 ← volver

1. El cuadrado ya está completo: $u = x + 3$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, y queda $\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+9)^{3/2}}$.
2. Raíz de $u^2 + a^2$ con $a = 3$: $u = 3\tan\theta$, $\mathrm{d}u = 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{u^2+9} = 3\sec\theta$.
$$I = \int \frac{3\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\operatorname{sen}\theta + C$$
3. Triángulo: opuesto u, adyacente 3, hipotenusa $\sqrt{u^2+9}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+9}}$.
4. $I = \frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$. Comprobación (en u): $\frac{1}{9}\cdot\frac{(u^2+9)-u^2}{(u^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{(u^2+9)^{3/2}}$.

Ejercicio 3A.6.6 ← volver

1. $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$: $I = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u-1)}$, racional.
2. $\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$, es decir, $1 = A(u^2+1) + (Bu+C)(u-1)$.
3. Con $u = 1$: $A = \frac{1}{2}$. Coeficiente de u^2: $A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Término independiente: $A - C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.
4. Integrando: $\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln(u^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} u$.
5. $I = \frac{1}{2}\ln|e^x - 1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} e^x + C$. Comprobación (en u):
$$\frac{1}{2(u-1)} - \frac{u+1}{2(u^2+1)} = \frac{(u^2+1)-(u^2-1)}{2(u-1)(u^2+1)} = \frac{1}{(u-1)(u^2+1)}$$

Ejercicio 3A.6.7 ← volver

1. Raíz de $x^2 + a^2$ con $a = 2$: $x = 2\tan\theta$, $\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta$.
2. Sustituyendo:
$$I = \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$
3. Triángulo: opuesto x, adyacente 2, hipotenusa $\sqrt{x^2+4}$; $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$. Comprobación:
$$-\frac{1}{4x^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

Ejercicio 3A.6.8 ← volver

1. Se cambia toda la raíz: $u = \sqrt{e^{2x}-1}$, $u^2 = e^{2x} - 1$, $2u\,\mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x$, así que $\mathrm{d}x = \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$.
2. Sustituyendo:
$$I = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \operatorname{ang\,tan} u + C$$
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1} + C$. Comprobación: $\frac{1}{1+(e^{2x}-1)}\cdot\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

E.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución

Ejercicio 3B.6.1 ← volver

1. Cortes: $4x^3 = 8x^2 \Rightarrow 4x^2(x-2) = 0$, así que $x = 0$ (raíz doble: las curvas se tocan) y $x = 2$.
2. En $x = 1$: $8x^2 = 8 > 4 = 4x^3$; arriba está la parábola.